繰り返し衝突における反発係数の式の扱い方

例 1：小球の落下と繰り返し衝突

落下中の小球が速度 v_0 で静止している床と反発係数 e （$0<e<1$）の衝突を始めてから n 回目の衝突後の速度を v_n とする。

$$\frac{\text{衝突後の相対速度}}{\text{衝突前の相対速度}}=-e \text{ より，}$$

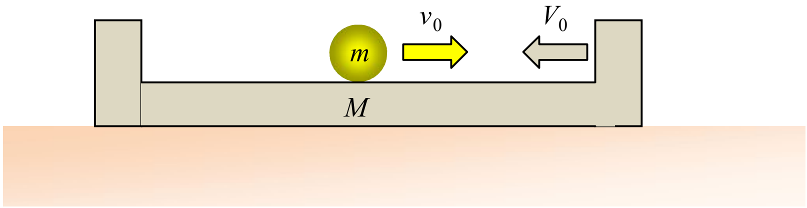
$$\frac{v_1-0}{v_0-0}=\frac{v_2-0}{v_1-0}=\frac{v_3-0}{v_2-0}=\cdots=\frac{v_n}{v_{n-1}}=-e$$

$$\therefore \frac{v_1}{v_0}\cdot\frac{v_2}{v_1}\cdot\frac{v_3}{v_2}\cdots\cdots\frac{v_n}{v_{n-1}}=(-e)^n$$

$$\therefore \frac{v_n}{v_0}=(-e)^n$$

$$\therefore v_n=(-e)^n v_0$$

例 2：物体間の繰り返し衝突と運動量保存則



滑らかな床上で，質量 m の小球と質量 M の台が，
それぞれ速度 v_0 と V_0 で反発係数 e （$0<e<1$）の衝突を始めてから
n 回目の衝突後の速度をそれぞれ v_n， V_n とする。
運動量保存則より， $mv_0+MV_0=mv_n+MV_n$ ・・・①

$$\frac{\text{衝突後の相対速度}}{\text{衝突前の相対速度}}=-e \text{ より，}$$

$$\frac{v_1-V_1}{v_0-V_0}=\frac{v_2-V_2}{v_1-V_1}=\frac{v_3-V_3}{v_2-V_2}=\cdots=\frac{v_n-V_n}{v_{n-1}-V_{n-1}}=-e$$

$$\therefore \frac{v_1-V_1}{v_0-V_0}\cdot\frac{v_2-V_2}{v_1-V_1}\cdot\frac{v_3-V_3}{v_2-V_2}\cdots\cdots\frac{v_n-V_n}{v_{n-1}-V_{n-1}}=(-e)^n$$

$$\therefore \frac{v_n-V_n}{v_0-V_0}=(-e)^n$$

$$\therefore v_n-V_n=(-e)^n(v_0-V_0) \quad \cdots ②$$

②より，$v_n = V_n + (-e)^n (v_0 - V_0)$
これを①に代入すると，

$$mv_0 + MV_0 = m\{V_n + (-e)^n (v_0 - V_0)\} + MV_n$$

$$\therefore (m + M)V_n = mv_0 + MV_0 - m(-e)^n (v_0 - V_0)$$

$$\therefore V_n = \frac{mv_0 + MV_0 - (-e)^n m(v_0 - V_0)}{m + M}$$

$$\therefore v_n = \frac{mv_0 + MV_0 - (-e)^n m(v_0 - V_0)}{m + M} + (-e)^n (v_0 - V_0) = \frac{mv_0 + MV_0 - (-e)^n M(v_0 - V_0)}{m + M}$$

とくに，$n \to \infty$ のとき，$(-e)^n \to 0$　$(\because |e| < 1)$ より，

$$v_n = V_n = \frac{mv_0 + MV_0}{m + M}$$